مثال: اوجد التكامل $\int_c z^3\, dz$

حيث ① القطعة المستقيمة التي تمتد بين $z=0$ الى $z=1+2i$

② c هي قطعتان مستقيمتان تمتد بين $z=0$ الى $z=1$

ثم القطعة الثانية تمتد بين $z=1$ الى $z=1+2i$

③ c تتكون من ثلاث قطع مستقيمة الاولى تمتد بين $z=0$ الى $z=1$

الثانية تمتد من $z=1$ الى $z=1+2i$ والثالثة تمتد من $z=1+2i$ الى $z=0$

الحل: الحالة الاولى

نحسب قيمة التكامل اعتماداً على العلاقة:

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

ان معادلة القطعة المستقيمة c التي تمتد من $z=0$ الى $z=1+2i$ هي

$$\star\ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad 0 \le t \le 1$$

$$z(t) = 0 + t(1+2i) = t + 2it \quad 0 \le t \le 1$$

$$\star\ z'(t) = 1+2i$$

$$\star\ f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$f(z(t)) = t^3 - 3t(4t^2) + i(3t^2\, 2t) - 8t^3)$$

$$= -11t^3 + i(-2t^3)$$

فان التكامل يكون:

$$\int_c z^3\, dz = \int_0^1 (-11t^3 - 2it^3)(1+2i)\, dt$$

$$= -(1+2i)\int_0^1 (11t^3 + 2t^3 i)\, dt$$

اعتماداً على العلاقة:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

$$\Rightarrow = -(1+2i)\left[\int_0^1 11t^3\, dt + 2i\int_0^1 2t^2\, dt\right]$$

$$= -(1+2i)\left[\frac{11}{4}t^4\Big|_0^1 + 2i\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right]$$

$$= -(1+2i)\left[\frac{11}{4} + i\frac{1}{2}\right] = -\left[\left(\frac{11}{4} - 1\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{11}{2}\right)\right] = \frac{-7}{4} - 6i$$

٢- بما ان C يتكون من قطعتين مستقيمتين عندئذ

$$\int_C z^3\,dz = \int_{C_1} z^3\,dz + \int_{C_2} z^3\,dz$$

لحساب قيمة التكامل الاول ان معادلة القطعة المستقيمة التي تمتد من $z_0=0$ و $z_1=1$

هي $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ $\quad 0 \le t \le 1$

$z(t) = 0 + t(1-0) = t$ $\quad 0 \le t \le 1$

$x(t)=t \quad y(t)=0$

$z'(t) = 1$

$f(z(t)) = t^3 - 0 + i(0) = t^3$

ومنه فان تكامل $\int_{C_1} z^3\,dz = \int_0^1 t^3 \cdot 1\,dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

~~$\int_{C_2} z^3\,dz = \int_0^1 [(1-12t^2) + i(6t-8t^3)]\,2i = 2i[\int ...$~~

٢ التوضيح

$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = 1 + t(1+2i-1) = 1 + 2it$ $\quad 0 \le t \le 1$

$x(t) \quad y(t)$

$f(z(t)) = 1 - 12t^2 + i(6t - 8t^3)$ $\quad z'(t) = 2i$

$$\int_{C_2} z^3\,dz = \int_0^1 [(1-12t^2) + i(6t-8t^3)]\,2i$$

$$= 2i\left[\int_0^1 (1-12t^2)\,dt + i\int_0^1 (6t-8t^3)\,dt\right]$$

$$= 2i\left[t - 4t^3\Big|_0^1 + i(3t^2 - 2t^4\Big|_0^1)\right]$$

$$= 2i[1-4 + i(3-2)] = 2i(-3+i) = -2-6i$$

$$\int_C z^3\,dz = \int_{C_1} z^3\,dz + \int_{C_2} z^3\,dz = \frac{1}{4} + (-2-6i) = \frac{1}{4} - 2 - 6i$$

$$= \frac{-7}{4} - 6i$$

-٣ $\int_C z^3\,dz = \int_{C_1} z^3\,dz + \int_{C_2} z^3\,dz + \int_{C_3} z^3\,dz$

$$= \frac{-7}{4} - 6i - \left(-\frac{7}{4} - 6i\right) = 0$$

$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t \Rightarrow z - z_1 = t(z_2 - z_1)$

$z = z + t(z_2 - z_1)$

الموضوع   التاريخ / / 20

مثال 2: أوجد قيمة التكامل $\int_c (y - x - 3x^2 i)\, dz$

حيث: ① c هي القطعة المستقيمة التي تبتدئ من z_0 إلى $z = 2 + i$

② c هي قطعتين مستقيمتين الأولى تمتد من $z = 0$ إلى $z = i$

والثانية تمتد من $z = i$ إلى $z = 2 + i$

③ c من ثلاث قطع الأولى تبتدئ من $z = 0$ إلى $z = i$

والثانية تبتدئ من $z = i$ إلى $z = 2 + i$ والثالثة تبتدئ من $z = 2 + i$ إلى $z = 0$

الحل: 1- معادلة القطعة المستقيمة في الحالة الأولى هي $z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ $\quad 0 \le t \le 1$

أي أن $z(t) = 0 + t((2 + i) - 0)$

$= 2t + it \qquad 0 \le t \le 1$

$z'(t) = 2 + i$

$f(z(t)) = (t - 2t) - 3 \cdot 4t^2 i = -t - 12t^2 i$

$$\int_c (y - x - 3x^2 i)\, dz = \int_0^1 (-t - 12t^2 i)(2 + i)\, dt$$

$$= -(2 + i)\left[\int_0^1 t\, dt + i\, 12 \int_0^1 t^2\, dt\right] = (-2 - i)\left[\frac{t^2}{2} + 4t^3 i\right]_0^1$$

$$= (-2 - i)\left(\frac{1}{2} + 4i\right) = (-1 + 4) + i\left(-8 - \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{17i}{2}$$

2- $$\int_c (y - x - 3x^2 i)\, dz = \int_{c_1} (y - x - 3x^2 i)\, dz + \int_{c_2} (y - x - 3x^2 i)\, dz$$

لنحسب قيمة التكامل في القطعة التي تبتدئ من $z = 0$ إلى $z = i$

$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad 0 \le t \le 1$

$z(t) = 0 + t(i - 0) = it \qquad 0 \le t \le 1$

$z'(t) = i$

$f(z(t)) = (t - 0 - 3 \cdot 0\, i) = t$

$$\int_{c_1} (y - x - 3x^2 i)\, dz = \int_0^1 t\, i\, dz = i \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{i}{2}$$

لحساب قيمة التكامل على C_2 ان معادلة C_2 هي

$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$z(t) = i + t(2+i-i) = i + 2t = 2t + i$

$z'(t) = 2$

$f(z(t)) = (1-2t) - 3(4t^2)i = 1 - 2t - 12t^2 i$

$$\int_{C_2} (y - x - 3x^2 i)\, dz = \int_0^1 [1 - 2t - 12t^2 i]\, 2\, dt$$

$$= 2\left[\int_0^1 (1-2t)\, dt + i \int -12t^2\, dt\right]$$

$$= [t - t^2 - i4t^3]_0^1 = -8i$$

$$\oint (y - x - 3x^3 i)\, dz = \int_{C_1} (y - x - 3x^3 i)\, dz + \int_{C_2} (y - x - 3x^3 i)\, dz + \int_{C_3} \text{---}\, dz \quad (3)$$

$$= -\frac{15}{2} i - \left(-3 - \frac{17}{2} i\right) = -3 + i$$

طريقة (2): الحل الثاني

القطعة المستقيمة في جزء من المستقيم الواصل بين النقطتين $\overset{x_1\ y_1}{(0,1)}$ والنقطة $\overset{x_2\ y_2}{(2,1)}$

ان معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين هي $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{1-1}{2-0}(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$z(t) = x(t) + i\, y(t)$

$= x(t) + i$

$z(t) = t + i \qquad 0 \leq t \leq 2 \ , \ x(t) = t$

ملاحظة:

من خلال المثالين السابقين نلاحظ ما يلي

في المثال الأول كانت الدالة المستخدمة هي $f(z) = z^2$

وقيمة التكامل لهذه الدالة لاحظنا انه لم يتغير عندما غيرنا طريقة الحل

اما قيمة التكامل لهذه الدالة لا تساوي ... لاحظنا تساوي صفر

تكامل غرين: العلاقة بين التكامل المنحني والتكامل السطحي

بينما في المثال الثاني كانت الدالة المستكملة هي $f(z) = (y - x - 3x^2 i)$ وجدنا أن قيمة التكامل تتغير بتغير الطريق الخاص الذي يصل بين البداية والنهاية كما أن قيمة تكامل هذه الدالة مع كفاف مغلق لم تكن معدومة والسبب في ذلك كون الدالة المستكملة في المثال الثاني دالة غير تحليلية

مبرهنة كوشي:

اذا كانت الدالة $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية على وضمن الكفاف المغلق البسيط عندئذ

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

الإثبات: لدينا

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t))\right] (x'(t) + i y'(t))\,dt$$

$$= \int u x' - v y'\,dt + i\int (v x' + u y')\,dt$$

$$= \int_C f(z)\,dz = \int u x'\,dt - v y'\,dt + i\int v x'\,dt + u y'\,dt$$

$$= \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

مبرهنة غرين:

اذا كانت $P(x,y)$ ، $Q(x,y)$ دالتان مستمرتان ولهما مشتقات جزئية مستمرة في الساحة D من المستوي xoy وكان محيط هذه الساحة المنحني R

$$\int_R P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

بالاستفادة من علاقة غرين السابقة يكون

$$\int_C v\,dx + u\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\oint_c u\,dx - v\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy$$

بما أن f تحليلية فهذا يعني أن f قابلة للاشتقاق أي أن f دالة تحقق شرط كوشي ريمان أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\oint_c f(z)\,dz = \oint u\,dx - v\,dy = 0 \ \wedge \oint v\,dx + u\,dy = 0$$

ومنه فإن

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

مثال على المبرهنة السابقة التي تحقق مبرهنة كوشي للتكامل المغلق البسيط نذكر

$$\oint_{|z|=2} e^{2}\,dz = 0 \qquad\qquad \oint_{|z-1|=2} \sin z\,dz = 0$$